

Sommes, trigonométrie, nombres complexes, fonctions réelles

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. La **clarté** de la copie fera varier la note de **± 1 point**.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.

Les questions simples ou utilisant une méthode classique doivent être traitées rapidement, sans perdre de temps au brouillon !

Exercice 1 — Calcul de sommes binomiales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{2k} \quad S'_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

On pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^n \binom{2n-1}{2k-1}$$

- 1) Calculer U_n et V_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer ?
- 2) a) Rappeler (sans la démontrer) la formule de symétrisation du coefficient binomial.
b) En déduire, grâce au changement d'indice $j = n - k$ dans U_n , que $U_n = V_n$.
- 3) a) Écrire V_n et U_n sous forme développée, en faisant apparaître leurs trois premiers et leurs deux derniers termes.
b) En déduire que $U_n + V_n = 2^{2n-1}$.
- 4) En déduire U_n et V_n en fonction de n .
- 5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. Montrer que $j \binom{m}{j} = \alpha_m \binom{m-1}{j-1}$, avec α_m un réel qui dépend uniquement de m que l'on précisera.
- 6) En déduire que $S_n = nV_n$, puis la valeur de S_n . On pourra exprimer le résultat en fonction d'un réel α_m bien choisi si sa valeur n'a pas été trouvée en question précédente.
- 7) a) Rappeler (sans la démontrer) la formule de Pascal.
b) En retirant un terme de la somme de U_n et un terme de la somme de V_n , montrer que $S'_n = U_n + V_n$, puis la valeur de S'_n .

Exercice 2 — Méthode de Cardan

On considère deux complexes non nuls p et q , ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \quad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P) : \quad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U et V les racines complexes de (P) . Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

- 1) Justifier que $UV = -\frac{p^3}{27}$ et $U + V = -q$.
- 2) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u .
- 3) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \frac{-p}{3u}$.
- 4) Calculer $u^3 v^3$. En déduire que $v^3 = V$.
- 5) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.
- 6) Montrer que $u + v$ est solution de (E) .
- 7) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi solutions de (E) .
- 8) Application 1 : on prend $p = -3$ et $q = 1$.
 - a) Calculer une des valeurs possibles pour chacun des complexes U , V , u et v . *Quel que soit le choix réalisé pour chaque complexe, cela conduira au même résultat pour la question suivante.*
 - b) En déduire les solutions de $z^3 - 3z + 1 = 0$.
- 9) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$(EQ) : \quad x^3 + (6 + 3i)x^2 + (6 + 12i)x - 3 + 8i = 0$$

- a) On pose $z = x + a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$. Déterminer p et q .
- b) Résoudre (EQ) .

Exercice 3 — Sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$S_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \cos(ak + b) \quad \text{et} \quad T_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$$

Partie I — Une formule fondamentale et ses conséquences

- 1) Calculer $S_n(a, b)$ et $T_n(a, b)$ lorsque $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- 2) On suppose dans cette question que $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
 - a) Calculer $S_n(a, b) + iT_n(a, b)$, puis établir que

$$S_n(a, b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \cos\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

$$T_n(a, b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \sin\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

- b) Retrouver la formule de $S_n(a, b)$ sans utiliser les nombres complexes, en transformant l'expression $2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos(ak + b)$ par une formule trigonométrique.
- 3) Soit $n \geq 2$ et $b \in \mathbb{R}$.
- a) Linéariser $\cos^3 \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- b) En déduire la valeur de la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3\left(b + \frac{2k\pi}{n}\right)$. On discutera selon la valeur de n .

Partie II — Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{j=-k}^k e^{ijx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

- 4) Montrer que $D_k(x)$ est réel et que

$$D_k(x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 5) En utilisant un résultat de la partie I, montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

- 6) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos(jx) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n \right)$$

- 7) En déduire une expression de $\sum_{j=1}^{n-1} j \cos(jx)$.

- 8) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \cos(jy) \geq -\frac{1}{2}$$

Blague — Au cours d'une soirée, un homme complexe dit à une femme réelle :
— Tu viens dans $\mathbb{C}$?